

Estudo analítico das teorias de viga de Bernoulli e Timoshenko para condições de contorno variadas

Analytical study of Bernoulli and Timoshenko beam theories for varied boundary conditions

Thiago Cunha da Silva

Universidade Federal Fluminense, Rio de Janeiro, Brasil.

E-mail: thiagocunha0307@gmail.com | ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3942-9723>

Revista de Engenharia Civil IMED, Passo Fundo, vol. 6, n. 1, p. 57-70, Janeiro-Junho 2019 - ISSN 2358-6508

[Recebido: Outubro 10, 2018; Aceito: Maio 21, 2019]

DOI: <https://doi.org/10.18256/2358-6508.2019.v6i1.2997>

Endereço correspondente / Correspondence address

Rua Coronel Moreira César, 434, apartamento 806, Icaraí,
Niterói, Rio de Janeiro, Brasil.

Sistema de Avaliação: *Double Blind Review*

Editora: Luciana Oliveira Fernandes

Como citar este artigo / How to cite item: [clique aqui/click here!](#)

Resumo

Neste artigo é analisada a diferença que ocorre nos deslocamentos utilizando as teorias de viga de Bernoulli e Timoshenko, variando-se a relação entre o vão e a altura da seção transversal e alterando a condição de contorno do elemento estrutural. As análises efetuadas ficaram restritas a vigas de seção retangular. Foi demonstrado que o efeito da distorção devido ao cisalhamento (teoria de Timoshenko), em comparação com a teoria de Bernoulli, amplifica os deslocamentos obtidos na estrutura em função da redução da relação vão/altura e com o aumento do grau de hiperestaticidade da estrutura, chegando, em alguns casos, a uma diferença superior ao dobro. Foram propostas relações limites de tamanho de vão e altura da seção transversal em função da condição de contorno para a consideração da distorção por cisalhamento.

Palavras-chave: Viga de Timoshenko. Coeficiente de cisalhamento. Análise estrutural.

Abstract

In this paper is analyzed the difference that occurs in the displacements using the Bernoulli and Timoshenko beam theories by varying the relationship between span and height of the cross section and changing the boundary conditions of the structural element. The analyzes were restricted to rectangular cross section beams. It was demonstrated that the effect of the shear coefficient (Timoshenko's theory), in comparison with Bernoulli's theory, amplifies the displacements obtained in the structure due to the reduction of the span/height relationship and the increase of the degree of internal static indeterminacy, reaching in some cases a difference of more than double. Limit ratios of span size and cross section height were proposed as a function of the boundary condition for the consideration of the shear coefficient.

keywords: Timoshenko's beam. Shear coefficient. Structural analysis.

1 Introdução

No dimensionamento estrutural, algumas hipóteses devem ser estabelecidas a fim de criar um modelo matemático para caracterizar determinado fenômeno físico. Na engenharia estrutural pode-se citar como as teorias mais importantes as de viga de Bernoulli e de Timoshenko.

A teoria de viga de Bernoulli consiste em admitir que, para pequenas deformações, as seções transversais permanecem planas e perpendiculares à linha neutra. Tal hipótese é válida somente quando a viga está submetida a pequenas deformações e pequenos deslocamentos, para grandes deformações e deslocamentos tal hipótese não é mais válida.

A teoria de viga de Timoshenko considera a distorção por cisalhamento que ocorre na seção transversal, ou seja, as seções não necessariamente ficam planas em relação à seção transversal, isto é, ocorre o empenamento da seção. Tal efeito torna-se considerável para vigas de baixa relação entre o vão e a altura da seção. De forma análoga à teoria de viga de Bernoulli, tais hipóteses são válidas somente para vigas de pequenas deformações e deslocamentos.

A teoria de viga de Timoshenko pode ser vista como a teoria mais precisa do ponto de vista físico do problema, haja vista que ela se aproxima mais do comportamento real da estrutura por considerar em sua formulação o efeito do cisalhamento, que é desconsiderado na teoria de viga de Bernoulli. Entretanto, o coeficiente de cisalhamento, oriundo da teoria de viga de Timoshenko, ainda é objeto de muitos estudos, como pode ser visto em Faghidian (2017), Chan et al. (2011).

Existem inúmeros trabalhos que visam a quantificar de forma mais precisa o coeficiente de cisalhamento da teoria de viga de Timoshenko. Faghidian (2017) apresenta uma compilação de diversas expressões para o valor do coeficiente de cisalhamento para diversos tipos de seções, Dong, *et al.* (2010) apresenta correções do fator de cisalhamento com base nos eixos principais de inércia para seções não simétricas e Chan, *et al.* (2011) apresenta uma nova abordagem para determinação do efeito do coeficiente de cisalhamento considerando os métodos energéticos.

2 Teoria de viga de Timoshenko

Os deslocamentos da teoria de viga de Timoshenko são dados por

$$u_x = -z\varphi \quad \text{Eq.1}$$

$$u_y = 0 \quad \text{Eq.2}$$

$$u_z = w(x) \quad \text{Eq.3}$$

Onde φ é a rotação total da seção, que considera a rotação devido à distorção por cisalhamento e devido à flexão da viga e w é o deslocamento ao longo do eixo z

As equações de equilíbrio são dadas pelas seguintes equações diferenciais

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EI \frac{d\varphi}{dx} \right) = q(x) \quad \text{Eq.4}$$

$$\frac{dw}{dx} = \varphi - \frac{1}{kGA} \frac{d}{dx} \left(EI \frac{d\varphi}{dx} \right) \quad \text{Eq.5}$$

A teoria de viga de Timoshenko se reduz à teoria de viga de Bernoulli quando a expressão 6 for próxima de zero, ou seja

$$\frac{EI}{kL^2 GA} \ll 1 \quad \text{Eq.6}$$

Combinando as equações 4 e 5 para uma viga homogênea de seção transversal constante tem-se

$$EI \frac{d^4 w}{dx^4} = q(x) - \frac{EI}{kGA} \frac{d^2 q}{dx^2} \quad \text{Eq.7}$$

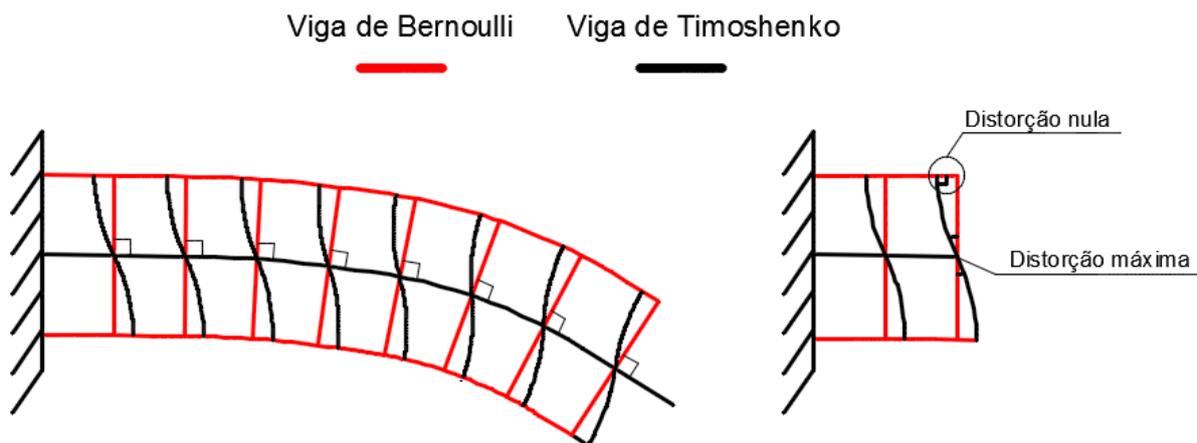
O momento fletor e a força cortante são dadas por

$$M = -EI \frac{d\varphi}{dx} \quad \text{Eq.8}$$

$$V = kGA \left(-\varphi + \frac{dw}{dx} \right) \quad \text{Eq.9}$$

A dedução da formulação da teoria de viga de Timoshenko pode ser vista de forma mais detalhada em Martha (2014) e nos livros clássicos de Timoshenko. A Figura 1 mostra a diferença na consideração entre os dois modelos de viga em uma viga engastada e livre de seção transversal retangular constante.

Figura 1 – Modelo de viga de Bernoulli e Timoshenko



Embora o emprego da teoria de viga de Bernoulli seja o mais abordado nas universidades, a teoria de viga de Timoshenko representa o comportamento mais próximo da realidade, sendo recomendável que, mesmo com pouca diferença entre os métodos, seja utilizada a teoria de viga de Timoshenko.

3 Coeficiente de cisalhamento

Diversos autores propuseram uma grande variedade de fórmulas para o parâmetro do coeficiente de cisalhamento, conforme abordado em Faghidian (2017), algumas formulações são apresentadas em sequência.

Cowper, *apud* Faghidian (2017) apresenta a seguinte fórmula para o cálculo do coeficiente de cisalhamento em seções retangulares

$$k = \frac{10(1+\nu)}{12+11\nu} \quad \text{Eq.10}$$

O valor consagrado de $k = 5/6$ é obtido somente quando o coeficiente de poisson é nulo, o que constitui uma aproximação que não corresponde à realidade. Existem outras formulações semelhantes à equação 10 que levam em consideração a relação entre a base e a altura da seção. Podem-se citar as formulações de Stephen, *apud* Faghidian (2017) e Hutchinson, *apud* Faghidian (2017), contudo há pouca discrepância de valores para tais formulações, principalmente para uma elevada razão entre a base e a altura da seção.

Em seções circulares, Hutchinson *apud* Faghidian (2017) apresenta a seguinte expressão para o coeficiente de cisalhamento

$$k = \frac{6(1+\nu)^2}{7+12\nu+4\nu^2} \quad \text{Eq.11}$$

Outras formulações são apresentadas em Faghidian (2017) para seções circulares. Verifica-se, a partir dos estudos de Faghidian (2017) e Chan, *et al.* (2011), que o coeficiente de cisalhamento é função do coeficiente de poisson e da relação entre as dimensões da seção transversal.

É interessante notar que os valores do coeficiente de cisalhamento para seção circular e retangular, quando admitido coeficiente de poisson nulo, chegam ao mesmo valor obtido pelas expressões de Cowper, *apud* Faghidian (2017).

Os coeficientes apresentados são válidos para seções cujo centro de cisalhamento seja coincidente com o centro de gravidade da seção; Dong, *et al.* (2013) e Barretta (2010) demonstram que para seções cujo centro de cisalhamento difira do centro de gravidade ocorrem mudanças em sua formulação.

Uma das dificuldades da implementação da teoria de Timoshenko na análise estrutural está na determinação do coeficiente para determinadas seções. Segundo Dong (2013), embora os coeficientes de cisalhamento propostos em literatura tenham bases sólidas, ainda há relutância em sua aceitação, pois as explicações não são totalmente convincentes e sua eficácia não tem sido avaliada para uma variedade de aplicações.

Demais coeficientes de cisalhamento foram omitidos desse estudo por não serem usuais na prática, contudo, recomendam-se os trabalhos de Faghidian (2017), Chan, *et al.* (2011), e Dong *et al.* (2010, 2013) para maior conhecimento sobre o assunto.

4 Formulação matricial

Soriano (2005) apresenta a formulação matricial pelo método dos deslocamentos considerando o efeito de deformação devido à força cortante. O efeito da deformação devido à força cortante é dado pela expressão 12

$$\varphi = \frac{12EI}{GA.L^2k} \quad \text{Eq.12}$$

Onde EI é a rigidez à flexão, GA é a rigidez transversal, L é o comprimento do elemento, e k é o coeficiente de cisalhamento.

A matriz de rigidez de um elemento de barra, considerando o efeito da distorção devido ao cisalhamento, é dada pela Figura 2

Figura 2 – Matriz de rigidez considerando o efeito da distorção

$$K := \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{-EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3 \cdot (1 + \phi)} & \frac{6 \cdot EI}{L^2 \cdot (1 + \phi)} & 0 & \frac{-12EI}{L^3 \cdot (1 + \phi)} & \frac{6 \cdot EI}{L^2 \cdot (1 + \phi)} \\ 0 & \frac{6 \cdot EI}{L^2 \cdot (1 + \phi)} & \frac{(4 + \phi) \cdot EI}{L \cdot (1 + \phi)} & 0 & \frac{-6 \cdot EI}{L^2 \cdot (1 + \phi)} & \frac{(2 - \phi) \cdot EI}{L \cdot (1 + \phi)} \\ \frac{-EA(i)}{L(i)} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-12EI}{L^3 \cdot (1 + \phi)} & \frac{-6 \cdot EI}{L^2 \cdot (1 + \phi)} & 0 & \frac{12EI}{L^3 \cdot (1 + \phi)} & \frac{-6 \cdot EI}{L^2 \cdot (1 + \phi)} \\ 0 & \frac{6 \cdot EI}{L^2 \cdot (1 + \phi)} & \frac{(2 - \phi) \cdot EI}{L \cdot (1 + \phi)} & 0 & \frac{-6 \cdot EI}{L^2 \cdot (1 + \phi)} & \frac{(4 + \phi) \cdot EI}{L \cdot (1 + \phi)} \end{bmatrix}$$

5 Análise numérica

As análises efetuadas nos itens 5.1, 5.2 e 5.3 foram realizadas com auxílio do software Mathcad, tendo como base as rotinas implementadas em Soriano (2005). O carregamento adotado em todos os exemplos foi distribuído com magnitude de 20 kN/m , variou-se a altura da seção para cada situação mantendo a base constante com valor de 20 cm .

Admitiu-se a resistência característica de compressão do concreto é $f_{ck} = 30 \text{ MPa}$ e foi considerado o módulo de elasticidade secante proposto pela NBR 6118 (2014) dado pela expressão 13, sendo arbitrados os seguintes valores para os coeficientes $\alpha_i = 1$ e $\alpha_e = 0,85$

$$E_{cs} = \alpha_e \alpha_i \cdot 5600 \cdot \sqrt{f_{ck}} = 26,07 \text{ GPa} \quad \text{Eq.13}$$

O coeficiente de cisalhamento foi obtido por meio da equação 10 admitindo-se o valor recomendado pela NBR 6118 (2014) para o coeficiente de poisson $\nu = 0,2$, obtendo-se

$$k = \frac{10(1+0,2)}{12+2,2} = 0,845 \text{ Eq.14}$$

É interessante salientar que o valor obtido na expressão 14 é muito próximo do valor normalmente utilizado para seções retangulares de $5/6$, tendo uma diferença inferior a 2%.

Ressalta-se que as análises efetuadas se restringiram apenas à análise teórica, desconsiderando-se os efeitos de fluência que ocorrem no concreto, a fissuração na viga e a influência da taxa de armadura longitudinal e transversal. Fica proposto para estudos futuros a influência que esses efeitos causam nos deslocamentos da estrutura ao se considerar a distorção por cisalhamento em conjunto com diferentes condições de contorno.

5.1 Viga biapoiada

A estrutura utilizada neste e nos demais exemplos foi discretizada em 20 elementos de barra. Os deslocamentos obtidos foram comparados com os do software Ftool, onde foi verificada a concordância nos resultados. A Tabela 1 e a Tabela 2 apresentam os resultados obtidos para o deslocamento máximo em uma viga biapoiada dado pela Figura 3.

Figura 3 – Modelo estrutural viga biapoiada

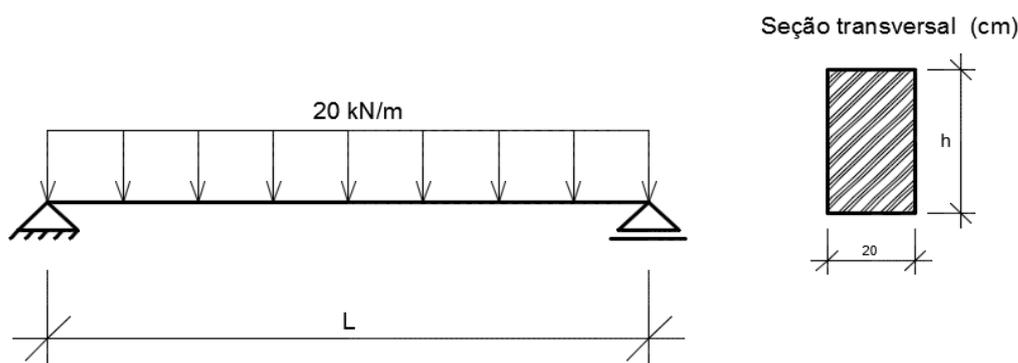


Tabela 1 – Viga biapoiada com vão de 10 metros

Deslocamento máximo (mm)		Altura da seção (mm)	Razão (1)/(2)	vão (m)	Razão vão/altura
Tmoshenko (1)	Bernoulli (2)				
222,421	221,967	300	1,00	10	33,3
93,983	93,642	400	1,00	10	25,0
48,217	47,945	500	1,01	10	20,0
27,973	27,746	600	1,01	10	16,7
17,667	17,473	700	1,01	10	14,3
11,876	11,705	800	1,01	10	12,5
8,372	8,221	900	1,02	10	11,1
6,129	5,993	1000	1,02	10	10,0
4,627	4,503	1100	1,03	10	9,1
3,582	3,468	1200	1,03	10	8,3
2,833	2,728	1300	1,04	10	7,7
2,281	2,184	1400	1,04	10	7,1
1,867	1,776	1500	1,05	10	6,7
1,548	1,463	1600	1,06	10	6,3
1,3	1,22	1700	1,07	10	5,9
1,103	1,028	1800	1,07	10	5,6
0,945	0,874	1900	1,08	10	5,3
0,817	0,749	2000	1,09	10	5,0

Tabela 2 – Viga biapoiada com vão de 5 metros

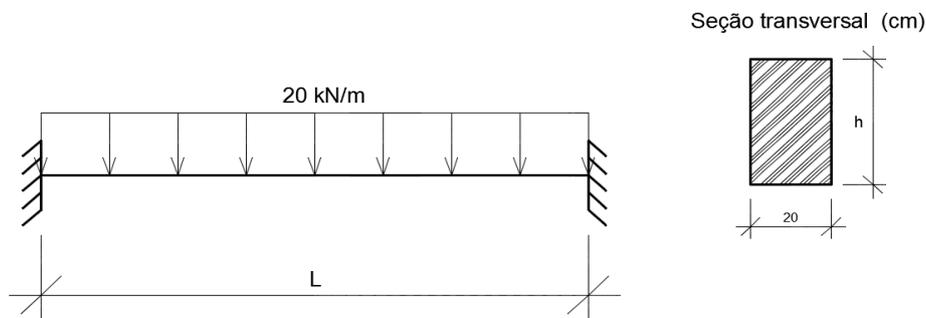
Deslocamento máximo (mm)		Altura da seção (mm)	Razão (1)/(2)	vão (m)	Razão vão/altura
Tmoshenko (1)	Bernoulli (2)				
13,986	13,873	300	1,01	5	16,7
5,938	5,853	400	1,01	5	12,5
3,065	2,997	500	1,02	5	10,0
1,791	1,734	600	1,03	5	8,3
1,141	1,092	700	1,04	5	7,1
0,774	0,732	800	1,06	5	6,3
0,552	0,514	900	1,07	5	5,6
0,409	0,375	1000	1,09	5	5,0
0,312	0,281	1100	1,11	5	4,5
0,245	0,217	1200	1,13	5	4,2
0,197	0,17	1300	1,16	5	3,8
0,161	0,137	1400	1,18	5	3,6
0,134	0,111	1500	1,21	5	3,3
0,113	0,091	1600	1,24	5	3,1
0,096	0,076	1700	1,26	5	2,9
0,083	0,064	1800	1,30	5	2,8
0,073	0,055	1900	1,33	5	2,6
0,064	0,047	2000	1,36	5	2,5

Os resultados obtidos na Tabela 1 e Tabela 2 são consistentes com os dados apresentados em Soriano (2005) e Martha (2010), haja vista que o efeito da distorção por cisalhamento não influencia de forma significativa os deslocamentos, apenas para uma baixa relação entre o vão e a altura da seção. Oñate *apud* Silva, *et al.* (2016) relata que para uma relação vão/altura inferior a 10 deve-se aplicar a teoria de viga de Timoshenko, ou seja, considerando uma diferença de 2% nos deslocamentos em relação à teoria de Bernoulli, que consiste em um critério aceitável para se utilizar o coeficiente de cisalhamento.

5.2 Viga biengastada

A Tabela 3 e a Tabela 4 apresentam os resultados obtidos para o deslocamento máximo em uma viga biengastada dado pela Figura 4.

Figura 4 – Modelo estrutural viga biengastada



Observa-se que os deslocamentos relativos obtidos na viga biengastada foram significativamente maiores em comparação aos de viga biapoçada, exceto para elevada razão vão/altura na qual a diferença entre os resultados foi irrisória. Esse resultado está de acordo com o obtido em Martha (2014) onde foi realizado um estudo da carga crítica de flambagem considerando as teorias de Bernoulli e Timoshenko para uma viga engastada e foi constatado que os deslocamentos oriundos da teoria de viga de Timoshenko foram expressivamente superiores aos de Bernoulli.

Tabela 3 – Viga biengastada com vão de 10 metros

Deslocamento máximo (mm)		Altura da seção (mm)	Razão (1)/(2)	vão (m)	Razão vão/altura
Tmoshenko (1)	Bernoulli (2)				
44,847	44,393	300	1,01	10	33,3
19,069	18,728	400	1,02	10	25,0
9,861	9,589	500	1,03	10	20,0
5,776	5,549	600	1,04	10	16,7
3,689	3,495	700	1,06	10	14,3
2,511	2,341	800	1,07	10	12,5
1,796	1,644	900	1,09	10	11,1
1,335	1,199	1000	1,11	10	10,0
1,024	0,901	1100	1,14	10	9,1
0,807	0,694	1200	1,16	10	8,3
0,65	0,546	1300	1,19	10	7,7
0,534	0,437	1400	1,22	10	7,1
0,446	0,355	1500	1,26	10	6,7
0,378	0,293	1600	1,29	10	6,3
0,324	0,244	1700	1,33	10	5,9
0,281	0,206	1800	1,36	10	5,6
0,246	0,175	1900	1,41	10	5,3
0,218	0,15	2000	1,45	10	5,0

Tabela 4 – Viga biengastada com vão de 5 metros

Deslocamento máximo (mm)		Altura da seção (mm)	Razão (1)/(2)	vão (m)	Razão vão/altura
Tmoshenko (1)	Bernoulli (2)				
2,888	2,775	300	1,04	5	16,7
1,256	1,171	400	1,07	5	12,5
0,667	0,599	500	1,11	5	10,0
0,404	0,347	600	1,16	5	8,3
0,267	0,218	700	1,22	5	7,1
0,189	0,146	800	1,29	5	6,3
0,141	0,103	900	1,37	5	5,6
0,109	0,075	1000	1,45	5	5,0
0,087	0,056	1100	1,55	5	4,5
0,072	0,043	1200	1,67	5	4,2
0,06	0,034	1300	1,76	5	3,8
0,052	0,027	1400	1,93	5	3,6
0,045	0,022	1500	2,05	5	3,3
0,04	0,018	1600	2,22	5	3,1
0,035	0,015	1700	2,33	5	2,9
0,032	0,013	1800	2,46	5	2,8
0,029	0,011	1900	2,64	5	2,6
0,026	0,0094	2000	2,77	5	2,5

5.3 Viga contínua

A Tabela 5 apresenta os resultados obtidos para o deslocamento máximo em uma viga contínua dado pela Figura 5.

Figura 5 – Modelo estrutural viga contínua

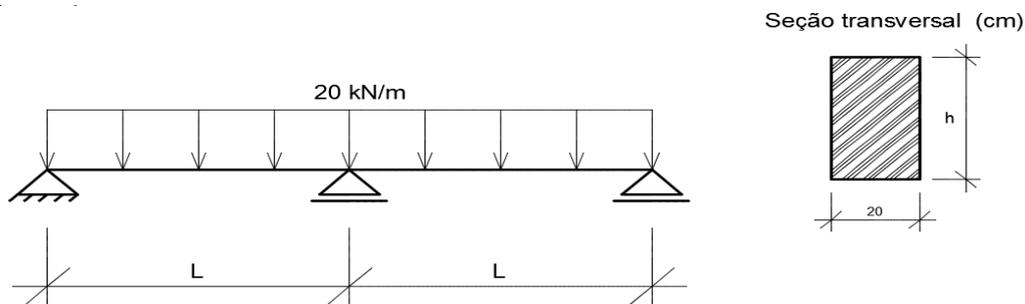


Tabela 5 – Viga contínua de dois vãos

Deslocamento máximo (mm)		Altura da seção (mm)	Razão (1)/(2)	vão (m)	Razão vão/altura
Tmoshenko (1)	Bernoulli (2)				
5,881	5,753	300	1,02	5	16,7
2,523	2,427	400	1,04	5	12,5
1,319	1,243	500	1,06	5	10,0
0,783	0,719	600	1,09	5	8,3
0,508	0,453	700	1,12	5	7,1
0,351	0,303	800	1,16	5	6,3
0,256	0,213	900	1,20	5	5,6
0,194	0,155	1000	1,25	5	5,0
0,151	0,117	1100	1,29	5	4,5
0,122	0,09	1200	1,36	5	4,2
0,1	0,071	1300	1,41	5	3,8
0,084	0,057	1400	1,47	5	3,6
0,071	0,046	1500	1,54	5	3,3
0,062	0,038	1600	1,63	5	3,1
0,054	0,032	1700	1,69	5	2,9
0,048	0,027	1800	1,78	5	2,8
0,043	0,023	1900	1,87	5	2,6
0,039	0,019	2000	2,05	5	2,5

A razão entre as teorias de viga de Timoshenko e Bernoulli para viga contínua foi em média superior à de viga isostática e inferior à de viga biengastada. Pôde-se verificar que com o aumento do grau de hiperstaticidade da estrutura maior foi a influência da teoria de viga de Timoshenko no cálculo do deslocamento.

6 Análise dos resultados

Constata-se, a partir dos resultados apresentados, que a teoria de viga de Timoshenko, em comparação com a teoria de viga de Bernoulli, gerou maiores deslocamentos em todos os casos apresentados, como de fato é relatado em literatura técnica.

Observa-se que o aumento dos deslocamentos na teoria de viga de Timoshenko não é função apenas de características da seção ou da relação entre o vão e a altura da seção transversal, mas também é dada em função da condição de contorno da estrutura.

Em vigas isostáticas, seguindo o critério em que a diferença entre os deslocamentos pelas duas teorias deve ser inferior a 2%, deve-se utilizar o efeito da distorção devido ao cisalhamento quando a razão entre o vão e a altura for menor que 10.

Seguindo os critérios adotados no parágrafo anterior, em vigas contínuas deve-se verificar a relação entre a altura da seção e o vão de cada tramo da viga, recomenda-se que quando esta relação for inferior a 20 seja utilizada a teoria de Timoshenko para o cálculo dos deslocamentos.

De forma análoga aos casos anteriores, em vigas biengastadas a distorção devido ao cisalhamento deve ser considerada quando a razão entre o vão e a altura for inferior a 25.

As estruturas apresentadas nos itens 5.2 e 5.3 são hiperestáticas e apresentaram maiores deslocamentos pela teoria de viga de Timoshenko do que pela teoria de Bernoulli. Verifica-se que, em vigas cuja restrição de apoio esteja na rotação (engastado), a teoria de viga de Timoshenko apresenta deslocamentos mais acentuados. Verificou-se que o grau de hiperestaticidade influencia na diferença entre os deslocamentos, diante dos resultados obtidos pôde-se inferir que quanto maior o grau de hiperestaticidade da estrutura, maior a influência dos deslocamentos pela teoria de viga de Timoshenko. Resultado semelhante pode ser observado em Martha (2014) onde se verificou que uma viga engastada submetida a um carregamento axial sofre maiores deslocamentos ao se considerar a distorção por cisalhamento em comparação com a teoria de viga de Bernoulli.

Ressalta-se que o estudo se restringiu a casos particulares de condições de contorno e geometria. Para situações diferentes das apresentadas, devem-se realizar estudos específicos a fim de verificar a magnitude da influência que a distorção por cisalhamento provoca na estrutura.

7 Conclusões

Observou-se neste artigo que o efeito da distorção por cisalhamento não deve ser negligenciado no dimensionamento estrutural, podendo chegar a uma diferença de até mais que o dobro em comparação com a teoria de Bernoulli.

Diante dos resultados apresentados, recomenda-se que seja levado em consideração o efeito da distorção por cisalhamento, não apenas em vigas de grande altura ou de baixa relação entre o vão e a altura da seção, mas também deve-se considerar a condição de contorno adotada no elemento estrutural.

Tendo como referência que não pode haver uma discrepância maior que 2% nos deslocamentos em comparação com a teoria de Bernoulli, sugere-se que a teoria de viga de Timoshenko seja utilizada para as seguintes relações entre vão e altura em função da condição de contorno: Vigas isostáticas com relação vão/altura inferior a 10, vigas contínuas de dois vãos com comprimentos iguais com relação vão/altura inferior a 20 e vigas biengastadas com relação vão/altura inferior a 25.

Certos aspectos que não foram abordados neste estudo devem ser levados em consideração no cálculo dos deslocamentos. Em estruturas de concreto armado, devem-se levar em conta os efeitos de fissuração que reduzem a rigidez da estrutura e conseqüentemente amplificam os deslocamentos, a contribuição na rigidez que a taxa de armadura longitudinal e transversal proporcionam e os efeitos de fluência do concreto que aumentam os deslocamentos.

Vale ressaltar que a teoria de viga de Timoshenko é a que, teoricamente, representa com maior precisão o comportamento da estrutura, devendo, sempre que possível, utilizá-la na análise estrutural.

Referências

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS DE NORMAS TÉCNICAS. *NBR 6118: Projeto de Estruturas de Concreto - Procedimento*, Rio de Janeiro, 2014.

BARRETTA, Raffaele; BARRETTA, Annalisa. Shear stresses in elastic beams: an intrinsic approach, *European Journal of Mechanics A/Solids*, v. 29, p. 400-409, 2010.

CHAN, K.T.; LAI, K.F.; STEPHEN, N.G.; YOUNG, K. A new method to determine the shear coefficient of Timoshenko beam theory, *Journal of Sound and Vibration*, v. 330, p. 3488-3497, 2011.

DONG, S. B.; ALPDOGAN, C.; TACIROGLU, E. Much ado about shear correction factors in Timoshenko beam theory. *International Journal of Solids and Structures*, v. 47, p. 1651-1665, 2010.

DONG, S. B.; ÇARBAS, S.; TACIROGLU, E. On principal shear axes for correction factors in Timoshenko beam theory. *International Journal of Solids and Structures*, v. 50, p. 1681-1688, 2013.

FAGHIDIAN, Ali. Unified Formulations of the Shear coefficients in Timoshenko Beam Theory. *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, v. 143, issue 9, 2017.

MARTHA, Luiz Fernando, BURGOS, Rodrigo. Diferenças na consideração da distorção no modelo de Timoshenko de uma viga submetida a carregamento axial, JORNADA SUL AMERICANA DE ENGENHARIA ESTRUTURAL, Uruguai, 2014.

MARTHA, Luis Fernando. *Análise de estruturas: conceitos e métodos básicos*. 1 ed. RJ: Elsevier, 2010.

SILVA, Jéssica; LEMES, Igor; SILVEIRA, Ricardo; SILVA, Andréa. Influência da teoria de viga na análise geometricamente não linear de estruturas reticuladas. PROCEEDINGS OF THE XXXVII IBERIAN LATIN-AMERICAN CONGRESS ON COMPUTATIONAL METHODS IN ENGINEERING, Brasília, 2016.

SORIANO, Humberto Lima. *Análise de Estruturas - Formulação Matricial e Implementação Computacional*. RJ: Editora Ciência Moderna Ltda, 2005.